

Technische Optik 10

1 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Die Berechnung von Strahlverläufen in Linsensystemen und ihre Bedeutung für die Funktion von Linsen und Systemen habe ich aus drei Büchern von Rudolf Kingslake (1903 – 2003) gelernt:

- 1.) "Optical System Design", Academic Press 1983;
- 2.) "Lens Design Fundamentals", Academic Press 1978;
- 3.) "A History of the Photographic Lens", Academic Press 1989.

Diese Bücher zeichnen sich durch hohen Sachverstand, klare Darstellung und einen treffsicheren Stil aus. Begeisterung für das Arbeitsgebiet und Bescheidenheit runden das Bild einer großen Persönlichkeit ab.

Einer seiner Studenten kam mit einer in der Vorlesung gestellten Aufgabe nicht klar. Er nahm all seinen Mut zusammen und suchte ihn im Büro bei Kodak auf, wo Dr. Kingslake über 30 Jahre lang Cheftentwickler war. Dabei wurde unserem Studenten klar, wie unwichtig doch seine kleine Frage für diesen bedeutenden Wissenschaftler sein musste. Dennoch bat er um Hilfe für die Aufgabe.

Kingslake antwortete: *"Good heavens, lad, of course I'll be pleased to help you! Come in, have a seat, relax and tell me, what it was that I must not have explained clearly enough in class!"*

Zitat von Rolf Fricke aus <http://people.rit.edu/tphs-kingslake.html>



Technische Optik 10

2 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

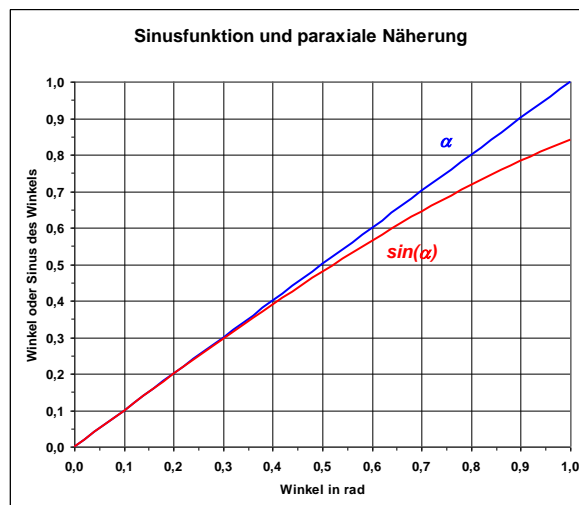
Die Grundlage der *paraxialen Näherung* bildete das *paraxiale Brechungsgesetz*: $n^* \varepsilon = n'^* \varepsilon'$

Aus ihm folgte die *paraxiale Schnittweitengleichung*:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}$$

Der Achsabstand h des einfallenden Strahls ist in dieser Gleichung *nicht* mehr enthalten! Daraus folgt: Alle Strahlen mit demselben Einfallswinkel schneiden sich in einem Punkt!

Solange die in Frage kommenden Winkel klein sind, ist zwischen dem Winkel (in rad, blau) und dem Sinus des Winkels (rot) kaum ein Unterschied zu erkennen: Die paraxiale Näherung liegt ziemlich nahe an der Realität, ist aber ungenau.



Technische Optik 10

3 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Richtige Strahlverläufe erhält man nur, wenn man das snelliussche Brechungsgesetz anwendet:

$$n \cdot \sin(\varepsilon) = n' \cdot \sin(\varepsilon')$$

Der Unterschied zwischen dem Winkel (in rad) und dem Sinus des Winkels ist der Grund für die Abweichung zwischen paraxialer Näherung und der Wirklichkeit mit ihren Aberrationen.

In der Mathematik nähert man eine Funktion manchmal durch den führenden Teil einer unendlichen Reihe an. Die MacLaurin-Reihe der Sinusfunktion lautet:

$$\sin(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} - \frac{\varepsilon^7}{7!} + \dots$$

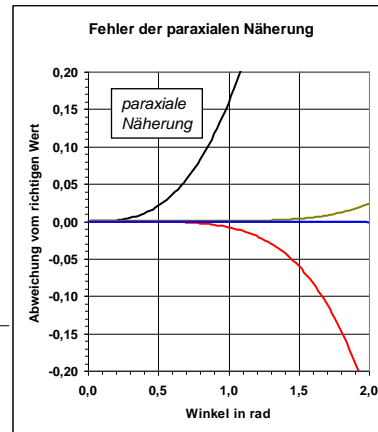
Die Grafik zeigt den Unterschied zwischen der Sinusfunktion und der Näherung, die durch Abbruch der unendlichen Reihe geschieht.

Schwarz: $\sin(\varepsilon) = \varepsilon$

Grün: $\sin(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!}$

Rot: $\sin(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!}$

Blau: $\sin(\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} - \frac{\varepsilon^7}{7!}$



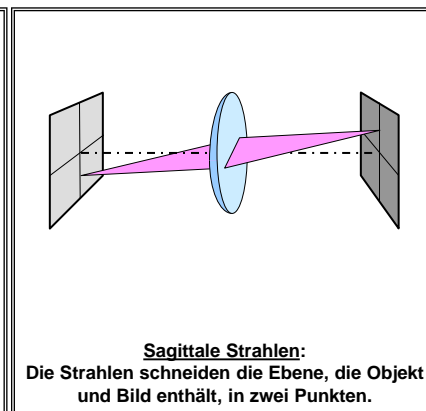
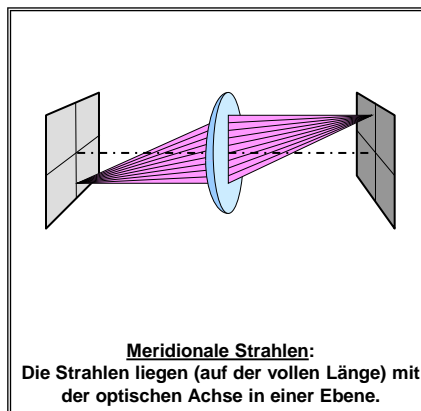
Technische Optik 10

4 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Die von jeder Näherung befreite Strahldurchrechnung ist noch einfach, wenn man sich auf Strahlen beschränkt, die in ihrem ganzen Verlauf mit der optischen Achse in einer Ebene liegen. Dann spricht man von **meridionalen Strahlen**, und diese Ebene heißt **Meridionalebene**.



Gezeigt ist die Abbildung eines unter der optischen Achse liegenden Punktes. Für diese Abbildung können meridionale Strahlen oder sagittale Strahlen benutzt werden.

Technische Optik 10

5 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

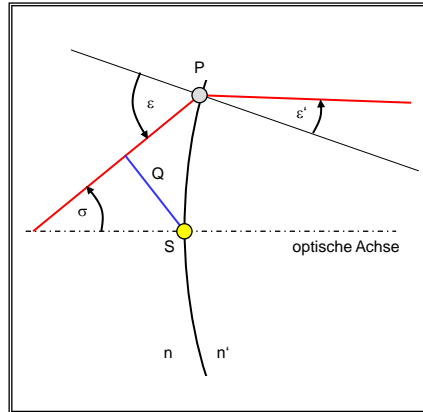
Es ist üblich, zur Beschreibung des Strahls den Winkel σ , den er mit der optischen Achse bildet, und den Abstand Q vom Scheitelpunkt S zu benutzen, gemessen durch das Lot vom Punkt auf die Linie des Strahls. Der Winkel ist positiv, wenn die Bezugsgerade im positiven Drehsinn (= gegen den Uhrzeiger) bewegt werden muss, um zum Strahl zu kommen.

Gezeigt ist ein Strahl ($\sigma > 0$), der im Punkt P die Oberfläche trifft. Dort findet durch Brechung die Richtungsänderung statt.

Den Einfallswinkel ε (hier $\varepsilon > 0$) für die Anwendung des Brechungsgesetzes messen wir im Punkt P gegen das Einfallslot; das ist bei einer sphärischen Oberfläche eine Linie durch den Krümmungsmittelpunkt (rechts).

Durch Anwendung des snelliusschen Brechungsgesetzes ergibt sich der Brechungswinkel ε' (hier $\varepsilon' > 0$).

Der gebrochene Strahl wird durch neu zu berechnende Werte von Q' und σ' charakterisiert.



Technische Optik 10

6 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Anders als bei der paraxialen Strahldurchrechnung muss zunächst aus dem Winkel σ mit der optischen Achse der Einfallswinkel ε berechnet werden. Beginnen wir mit der optischen Achse, auf der der Mittelpunkt M einer sphärischen Oberfläche mit Radius r liegt (= zentriertes System).

Die optische Achse durchbohrt die optische Oberfläche im Scheitelpunkt S .

Vom Punkt O auf der optischen Achse startet ein Strahl unter dem Winkel σ und trifft in P die Oberfläche.

Die Linie von M nach P (Abstand r) bildet in P das Einfallslot. Dort tritt der Einfallswinkel ε auf.

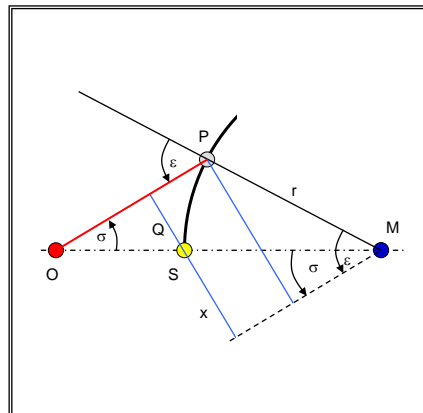
Eine zum Strahl parallele Gerade wird durch M gezeichnet. Senkrecht dazu liegt die Gerade der Länge $Q + x$ (blau gezeichnet).

Es gilt die Beziehung: $\sin(\varepsilon) = \frac{Q+x}{r} = \frac{Q}{r} + \frac{x}{r}$

Außerdem erkennt man: $\sin(\sigma) = \frac{x}{r}$



$$\sin(\varepsilon) = \frac{Q}{r} + \sin(\sigma) \quad 1$$



Technische Optik 10

7 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

In dieser ersten Brechungsgleichung stehen rechts vom Gleichheitszeichen nur Größen, die bei gegebenem optischen System (r) und gegebenem Strahl (Q, σ) bekannt sind. Daraus kann also $\sin(\varepsilon)$ berechnet werden.

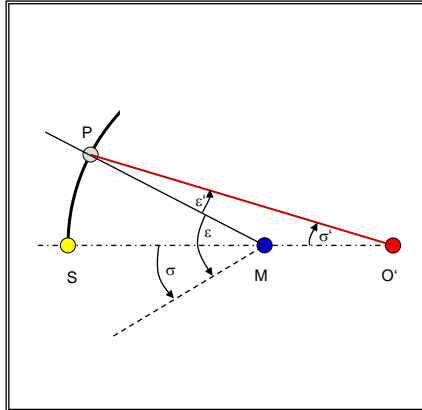
Die zweite Brechungsgleichung baut auf diesem Zahlenwert auf und ist das snelliussche Brechungsgesetz, mit dessen Hilfe $\sin(\varepsilon')$ berechnet wird:

$$\sin(\varepsilon') = \frac{n}{n'} * \sin(\varepsilon) \quad 2$$

Um die Ausbreitung des Strahls mit diesem Brechungswinkel ε' weiter verfolgen zu können, müssen Q' und σ' bestimmt werden. Den Winkel, den der gebrochene Strahl mit der optischen Achse bildet, bekommt man durch Betrachtung des Winkels SMP (in dieser Zeichnung: $\sigma' < 0$; $\varepsilon, \varepsilon', \sigma > 0$):

$$\varepsilon' - \sigma' = \varepsilon - \sigma$$

$$\sigma' = \sigma + \varepsilon' - \varepsilon \quad 3$$



Technische Optik 10

8 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Nun muss noch der Achsabstand Q' des Strahls nach der Brechung bestimmt werden. Dabei hilft eine weitere Skizze.

Der Achsabstand wird durch eine blau gezeichnete Hilfslinie symbolisiert, die vom Scheitelpunkt S lotrecht auf den gebrochenen Strahl (rot gezeichnet) gefällt wird.

Eine zum Strahl parallele Linie teilt Q' in die Teile x und y :

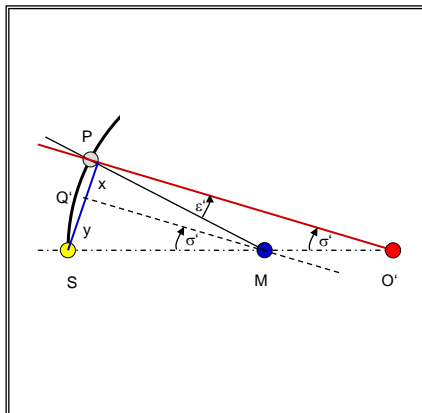
$$Q' = x + y$$

$$y = -r * \sin(\sigma')$$

$$x = r * \sin(\varepsilon')$$

$$Q' = r * (\sin(\varepsilon') - \sin(\sigma')) \quad 4a$$

Diese Gleichung ist ungeeignet für plane Oberflächen ($r = \infty$).



Technische Optik 10

9 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Betrachten wir eine plane Oberfläche, deren Normale parallel zur optischen Achse liegt.

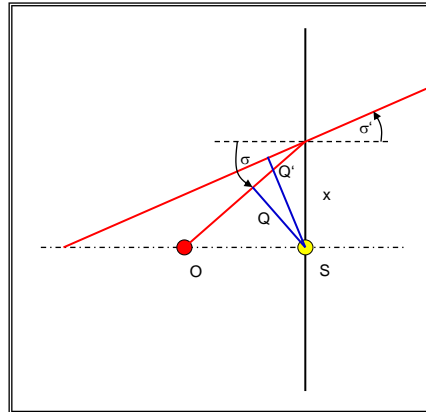
Die Beziehungen zwischen Q , Q' , σ und σ' lassen sich durch die gemeinsame Hypotenuse x angeben:

$$\frac{Q}{x} = \cos(\sigma)$$

$$\frac{Q'}{x} = \cos(\sigma')$$

$$\boxed{Q' = Q \cdot \frac{\cos(\sigma')}{\cos(\sigma)}} \quad \text{4b}$$

Die einzelne Brechungsgleichung der paraxialen Näherung wird also bei der meridionalen Strahldurchrechnung durch einen Satz von vier Gleichungen ersetzt.



Technische Optik 10

10 von 18

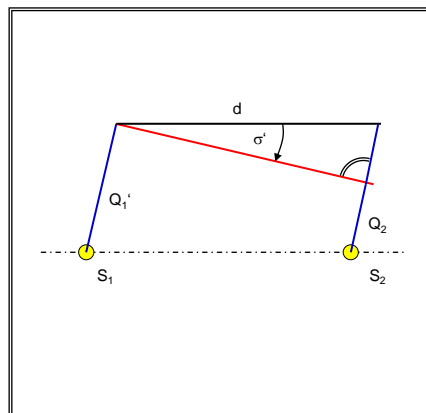
Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Entlang der optischen Achse (aber nicht unbedingt parallel zu ihr) breitet sich die Strahlung aus. Dafür hatten wir bei der paraxialen Näherung eine einzelne Gleichung, die Transfer-Gleichung. Auch für meridionale Strahlen ist eine Transfergleichung ausreichend.

Aus den geometrischen Verhältnissen der Grafik lässt sich die Transfer-Gleichung entnehmen (in dieser Zeichnung ist $\sigma' < 0$):

$$\boxed{Q_2 = Q_1' + d \cdot \sin(\sigma')} \quad \text{5}$$



Technische Optik 10

11 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Beispiel:

Wie groß ist die sphärische Aberration eines Strahls, gerechnet für Schnittweite s' und Brennweite f' ? Der Strahl fällt achsparallel im Abstand $h = 10$ mm auf die folgende, in Luft aufgestellte Linse. (Einheiten: Millimeter; wir rechnen mit 4 signifikanten Stellen.)

Hinweis: Die sphärische Aberration eines achsparallelen Strahls im Abstand $h = 1$ mm soll als vernachlässigbar klein angesehen werden.

$$\frac{1}{r_1} = c_1 = 0,01 \quad c_2 = -0,005 \quad d = 8 \quad n = 1,523$$

Die Gleichungen für Brechung und Transfer bei meridionaler Strahldurchrechnung lauten:

Brechung

$$1: \sin(\varepsilon) = \frac{Q}{r} + \sin(\sigma)$$

$$2: \sin(\varepsilon') = \frac{n}{n'} \sin(\varepsilon)$$

$$3: \sigma' = \sigma + \varepsilon' - \varepsilon$$

$$4a: Q' = r * (\sin(\varepsilon') - \sin(\sigma')) \quad 4b: Q' = Q * \frac{\cos(\sigma')}{\cos(\sigma)}$$

Transfer

$$5: Q_2 = Q_1' + d * \sin(\sigma')$$

Technische Optik 10

12 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Um die Aberration (Abweichung) auszurechnen, müssen mindestens **zwei Strahlen** durchgerechnet und ihre Schnittweite s' und Brennweite f' bestimmt werden. Zur Erinnerung: Die Brennweite f' wird von der Hauptebene H' gemessen, die Schnittweite s' vom Scheitelpunkt S' .

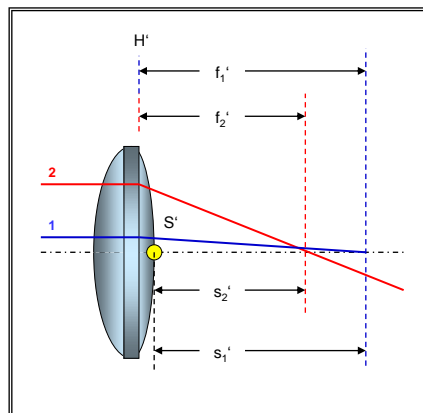
A) Wir wenden die Gleichung (1) auf den Strahl mit dem Achsabstand $h = 10$ mm an. Dazu müssen wir die auf der rechten Seite vorkommenden Variablen kennen:

$$\sigma = 0 \quad (\text{für einen achsparallelen Strahl})$$

$$Q = 10 \quad (\text{für einen achsparallelen Strahl ist } Q \text{ gleich dem Achsabstand } h)$$

Wir erhalten mit Gl. (1) für den Sinus des Einfallswinkels:

$$\sin(\varepsilon) = 0,1$$



Technische Optik 10

13 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Den Sinus des Brechungswinkels erhalten wir durch Anwendung der Gleichung (2):

$$\sin(\varepsilon') = \frac{1}{n} * 0,1 = 0,06566$$

Um die nächste Gleichung (3) einsetzen zu können, müssen wir ε' (in rad) bestimmen:

$$\varepsilon' = 3,765^0 = 0,06571 \text{ rad}$$

Nun benutzen wir Gleichung (3), um σ' zu berechnen:

$$\sigma' = \sigma + \varepsilon' - \varepsilon = 0 + 0,06571 \text{ rad} - 0,10017 \text{ rad} = -0,03446 \text{ rad}$$

Weil der Krümmungsradius der zweiten Oberfläche nicht Unendlich ist, können wir als nächste Gleichung (4a) verwenden:

$$Q' = \frac{0,06571 - (-0,03445)}{0,01} = 10,016$$

Technische Optik 10

14 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Danach müssen wir den Wert von Q an der nächsten Oberfläche bestimmen; das geschieht durch Anwendung der Transfer-Gleichung (5):

$$Q_2 = Q_1' + d * \sin(\sigma') = 10,016 + 8 * (-0,03445) = 9,7404$$

An der nächsten Oberfläche wird σ' zu σ (einfallender Strahl). Dort wenden wir Gleichung (1) an, um $\sin(\varepsilon)$ zu berechnen:

$$\sin(\varepsilon) = -9,7404 * 0,005 + (-0,03445) = -0,08315$$

Nun benutzen wir Gleichung (2), um $\sin(\varepsilon')$ zu berechnen:

$$\sin(\varepsilon') = -0,1266$$

Daraus bestimmen wir ε' , und dies können wir zur Berechnung von σ' benutzen:

$$\varepsilon' = -0,1270 \text{ rad}$$

$$\sigma' = \sigma + \varepsilon' - \varepsilon = -0,0345 \text{ rad} - 0,1270 \text{ rad} + 0,0833 \text{ rad} = -0,0782 \text{ rad}$$

Nun müssen wir den Wert von Q' an dieser zweiten Oberfläche bestimmen (Gleichung (4a)):

$$Q' = \frac{-0,1266 + 0,0781}{-0,005} = 9,7$$

Technische Optik 10

15 von 18

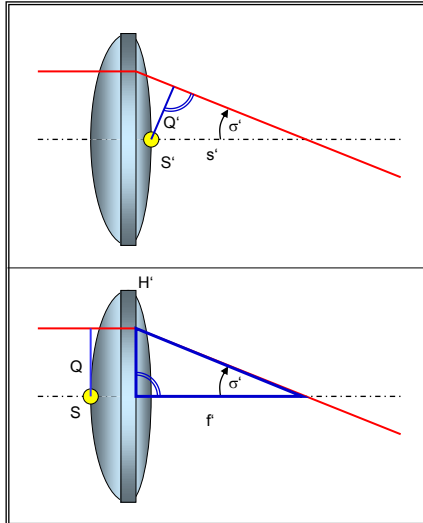
Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Wie kommt man zu den Formeln, mit denen aus den letzten berechneten Werten Schnittweite s' und Brennweite f' zu ermitteln sind? (Anders als bei der paraxialen Strahl durchrechnung wird hier die zugehörige trigonometrische Funktion benutzt!)

$$s' = -\frac{Q'}{\sin(\sigma')}$$

$$f' = -\frac{Q}{\tan(\sigma')}$$



Technische Optik 10

16 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Wir erhalten für dieses optische System und für diesen Strahl:

$$s' = -\frac{Q'}{\sin(\sigma')} = -\frac{9,7}{-0,0781} = 124,2$$

Für die Brennweite f' bekommen wir:

$$f' = -\frac{Q_{anf}}{\tan(\sigma')} = \frac{10}{0,0784} = 127,6$$

Eine gleiche Rechnung führen wir für $Q_{anf} = 1 \text{ mm}$ durch und erhalten:

$$s' = 125,1 \quad f' = 128,6$$

In der Schnittweite beträgt die sphärische Aberration 0,9 mm, in der Brennweite 1 mm. Dass diese beiden Aberrationen verschieden sind, liegt an der Hauptebene: Sie ist gar nicht eben, sondern etwas gewölbt. Wie groß die Wölbung ist, kann mit meridionaler Strahl durchrechnung bestimmt werden.

Technische Optik 10

17 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Meridion - meridionale Strahldurchrechnung

Datei Bearbeiten Definieren Start Optionen Extras Hilfe

Radius	100.000	-200.000			
Krümmung	0.01	-0.005			
Abstand		8			
Brechzahl	1.0	1.523	1.0		
σ (rad)	0.0000000	-0.0344603	-0.0781830		
Q (mm)	10.000000	9.7357055			
ε (rad)	0.1001674	-0.0832280			
ε' (rad)	0.0657072	-0.1269507			
Q' (mm)	10.011333	9.7013320			
starten	s'	124.2114873	f'	127.6443843	

Dieses Bild zeigt die Bediener-Oberfläche eines Programms mit dem diese Strahldurchrechnung im Labor durchgeführt wird. Nach rechts lassen sich weitere Oberflächen ansetzen. Mit den letzten Einträgen (Q', σ) bekommt der Benutzer die Möglichkeit, Fragen nach Schnittweite s' und Brennweite f' zu beantworten.

Technische Optik 10

18 von 18

Prof. Dr. Ulrich Sowada
Institut für Mechatronik
Fachhochschule Kiel

1 Lichtstrahlen	2 Lichtwellen	3 Linsen	4 Lichtmessung	5 Lichttechnik
3.1 Brechung	3.2 Paraxial	3.3 Meridional	3.4 Achromat	3.5 Zweilinsige Systeme

Ende Teil C